अध्याय 6

त्रिभुज

सभी NCERT प्रश्नों के पूर्ण हल

NCERT गणित कक्षा 10, पुनर्मुद्रण 2026-27। प्रश्नावली 6.1, 6.2 और 6.3 के सभी मुख्य प्रश्न तथा उप-प्रश्न।

इस नोट में

- समरूप आकृतियाँ और त्रिभुज
- आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (BPT)
- AA/AAA, SSS और SAS कसौटियाँ
- सभी आकृति-आधारित सिद्ध प्रश्न
- परीक्षा में लिखने योग्य महत्वपूर्ण पंक्तियाँ

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

महत्वपूर्ण परिभाषाएँ और सूत्र

समरूप त्रिभुज

संगत कोण बराबर तथा संगत भुजाएँ समानुपाती हों:

$$\angle A = \angle P, \quad \angle B = \angle Q, \quad \angle C = \angle R$$

$$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}}$$

समरूपता की कसौटियाँ

- AA/AAA: दो संगत कोण बराबर।
- SSS: तीनों संगत भुजाएँ समानुपाती।
- SAS: दो संगत भुजाएँ समानुपाती और बीच का कोण बराबर।

BPT

$DE \parallel BC$ हो तो $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$। इसका विलोम भी सत्य है।

समरूपता लिखते समय शीर्षों का क्रम सही रखें; यही भुजाओं का सही correspondence तय करता है।

प्रश्नावली 6.1 - प्रश्न 1

रिक्त स्थान भरिए

(i) सभी वृत्त **समरूप** होते हैं; आकार समान, त्रिज्या अलग हो सकती है।

(ii) सभी वर्ग **समरूप** होते हैं; सभी कोण 90° तथा संगत भुजाएँ समान अनुपात में होती हैं।

(iii) सभी **समबाहु** त्रिभुज समरूप होते हैं; प्रत्येक कोण 60°।

(iv) समान भुजा-संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होंगे यदि संगत कोण **बराबर** और संगत भुजाएँ **समानुपाती** हों।

उत्तर: (i) समरूप, (ii) समरूप, (iii) समबाहु, (iv) बराबर; समानुपाती।

प्रश्नावली 6.1 - प्रश्न 2 और 3

प्रश्न 2: उदाहरण

(i) समरूप आकृतियाँ: किसी भी दो वृत्त; किसी भी दो वर्ग।

(ii) असमरूप आकृतियाँ: एक वृत्त और एक त्रिभुज; एक वर्ग और ऐसा आयत जिसकी लंबाई-चौड़ाई का अनुपात $1 : 2$ हो। **प्रश्न 3: सत्य/असत्य**

(i) कोई भी दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं - **सत्य**; आकार और माप दोनों समान हैं।

(ii) कोई भी दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं - **असत्य**; आकार समान पर माप भिन्न हो सकता है।

(iii) समान भुजा-संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि संगत कोण बराबर और संगत भुजाएँ समानुपाती हों - **सत्य**।

हर सर्वांगसम आकृति समरूप है, पर हर समरूप आकृति सर्वांगसम नहीं।

प्रश्नावली 6.2 - प्रश्न 1 और 2

1. $DE \parallel BC$

(i) BPT से $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$। अतः $\frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC} \Rightarrow EC = 2$ cm।

(ii) $\frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4} \Rightarrow AD = 2.4$ cm। **2. क्या** $EF \parallel QR$**?**

(i) $\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9}{3} = 1.3$, पर $\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = 1.5$; समान नहीं। अतः नहीं।

(ii) $\frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$ और $\frac{8}{9} = \frac{8}{9}$; बराबर। अतः हाँ।

(iii) $EQ = 1.28 - 0.18 = 1.10$, $FR = 2.56 - 0.36 = 2.20$। $\frac{0.18}{1.10} = \frac{0.36}{2.20}$; अतः हाँ।

प्रश्नावली 6.2 - प्रश्न 3 और 4

3. सिद्ध करें $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$

$LM \parallel CB$ होने पर $\triangle ALM \sim \triangle ABC$। अतः

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC} \quad ...(1)$$

$LN \parallel CD$ होने पर $\triangle ALN \sim \triangle ADC$। अतः

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC} \quad ...(2)$$

(1), (2) से $\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}}$। **4. सिद्ध करें** $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

$DF \parallel AE$ से $\triangle BDF \sim \triangle BAE$:

$$\frac{BF}{BE} = \frac{BD}{BA} \quad ...(1)$$

$DE \parallel AC$ से $\triangle BDE \sim \triangle BAC$:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} \quad ...(2)$$

अतः $\frac{BF}{BE} = \frac{BE}{BC}$। Invertendo और componendo/खंडों की समानुपातिकता से $\boxed{\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}}$।

प्रश्नावली 6.2 - प्रश्न 5 और 6

5. $DE \parallel OQ,\ DF \parallel OR$; **सिद्ध करें** $EF \parallel QR$

$\triangle ODE \sim \triangle OPQ$ से $\frac{OD}{OP} = \frac{OE}{OQ}$।

$\triangle ODF \sim \triangle OPR$ से $\frac{OD}{OP} = \frac{OF}{OR}$।

अतः $\frac{OE}{OQ} = \frac{OF}{OR}$। BPT के विलोम से $\boxed{EF \parallel QR}$। **6.** $AB \parallel PQ,\ AC \parallel PR$; **सिद्ध करें** $BC \parallel QR$

$\triangle OAB \sim \triangle OPQ$ से $\frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ}$।

$\triangle OAC \sim \triangle OPR$ से $\frac{OA}{OP} = \frac{OC}{OR}$।

अतः $\frac{OB}{OQ} = \frac{OC}{OR}$। BPT के विलोम से $\boxed{BC \parallel QR}$।

प्रश्नावली 6.2 - प्रश्न 7 और 8

7. मध्य-बिंदु से समांतर रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है

$\triangle ABC$ में D, AB का मध्य-बिंदु है और $DE \parallel BC$। BPT से

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$AD = DB$, अतः $\frac{AD}{DB} = 1$; इसलिए $\frac{AE}{EC} = 1 \Rightarrow AE = EC$। अतः E, AC का मध्य-बिंदु है।

8. दो मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर

D, E क्रमशः AB, AC के मध्य-बिंदु हैं। तब $AD = DB$ और $AE = EC$।

$$\frac{AD}{DB} = 1 = \frac{AE}{EC}$$

BPT के विलोम से $\boxed{DE \parallel BC}$।

प्रश्न 7 में BPT और प्रश्न 8 में BPT का विलोम प्रयोग होता है।

प्रश्नावली 6.2 - प्रश्न 9 और 10

9. समलंब $ABCD$, $AB \parallel DC$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ में: $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)।

$\angle ABO = \angle CDO$ (एकांतर कोण)। अतः $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (AA)। इसलिए

$$\boxed{\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}}$$

10. अनुपात से समलंब सिद्ध करना

दिया: $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$। अतः $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$। साथ ही $\angle AOB = \angle COD$।

SAS से $\triangle AOB \sim \triangle COD$। अतः $\angle ABO = \angle CDO$। ये एकांतर कोण हैं, इसलिए $AB \parallel CD$।

उत्तर: $ABCD$ **एक समलंब है।**

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 1

कौन-से त्रिभुज समरूप हैं?

(i) तीनों कोण $60°, 80°, 40°$ बराबर: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (AAA)।

(ii) $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{CA}{PQ} = \frac{1}{2}$: $\triangle ABC \sim \triangle QRP$ (SSS)।

(iii) दो अनुपात $\frac{1}{2}$ हैं पर $\frac{2.7}{5} \neq \frac{1}{2}$: समरूप नहीं।

(iv) दो भुजाएँ $1 : 2$ तथा बीच का कोण $70°$: $\triangle MNL \sim \triangle QPR$ (SAS)।

(v) दो भुजाएँ समानुपाती हैं, पर बराबर दिया कोण उनके बीच का नहीं: समरूपता सिद्ध नहीं; समरूप नहीं।

(vi) कोण क्रमशः $70°, 80°, 30°$: $\triangle DEF \sim \triangle PQR$ (AAA)।

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 2 से 4

2. कोण ज्ञात करें

$\angle DOC + \angle BOC = 180° \Rightarrow \angle DOC = 55°$।

$\angle DCO = 180° - 70° - 55° = 55°$।

$\triangle ODC \sim \triangle OBA$ से $\angle OAB = \angle OCD = 55°$।

उत्तर: $\angle DOC = 55°,\ \angle DCO = 55°,\ \angle OAB = 55°$।

3. समलंब के विकर्ण

$AB \parallel DC$ से $\angle CDO = \angle ABO$, $\angle DCO = \angle BAO$; तथा $\angle DOC = \angle BOA$।

AAA से $\triangle DOC \sim \triangle BOA$। अतः $\boxed{AO/OC = OB/OD}$। **4.** $\triangle PQS \sim \triangle TQR$

$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow PQ = PR$। दिए अनुपात में $PR = PQ$ रखने पर $QR/QS = QT/QP$ और $\angle Q$ उभयनिष्ठ। SAS से परिणाम सिद्ध।

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 5 से 7

5.

$\triangle RPQ$ और $\triangle RTS$ में $\angle RPQ = \angle RTS$ (दिया)। साथ ही $\angle PRQ = \angle TRS$ (उभयनिष्ठ)।

AA से $\boxed{\triangle RPQ \sim \triangle RTS}$। **6.** $\triangle ABE \cong \triangle ACD$

CPCT से $AB = AC$ और $AE = AD$। अतः $AD/AB = AE/AC$ और $\angle A$ उभयनिष्ठ। SAS से $\boxed{\triangle ADE \sim \triangle ABC}$। **7. दो ऊँचाइयाँ AD, CE बिंदु P पर मिलती हैं**

(i) $\angle AEP = \angle CDP = 90°$, शीर्षाभिमुख कोण बराबर; $\triangle AEP \sim \triangle CDP$।

(ii) $\angle ADB = \angle CEB = 90°$, $\angle ABD = \angle CBE$; $\triangle ABD \sim \triangle CBE$।

(iii) $\angle AEP = \angle ADB = 90°$, $\angle PAE = \angle DAB$; $\triangle AEP \sim \triangle ADB$।

(iv) $\angle PDC = \angle BEC = 90°$, $\angle PCD = \angle BCE$; $\triangle PDC \sim \triangle BEC$।

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 8 और 9

8. समांतर चतुर्भुज $ABCD$

$AB \parallel CD$ और $AD \parallel BC$। इसलिए $\angle BAE = \angle BCF$ तथा $\angle AEB = \angle CBF$। AA कसौटी से

$$\boxed{\triangle ABE \sim \triangle CFB}$$

9. समकोण त्रिभुज ABC और AMP

(i) $\angle ABC = \angle AMP = 90^\circ$ और $\angle CAB = \angle PAM$ (उभयनिष्ठ दिशा)। अतः AA से

$$\triangle ABC \sim \triangle AMP$$

(ii) संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, इसलिए

$$\boxed{\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}}$$

समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर नहीं, बल्कि समानुपाती होती हैं।

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 10

CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ तथा $\angle EGF$ के समद्विभाजक हैं और $\triangle ABC \sim \triangle FEG$।

अतः $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle E$, $\angle ACB = \angle FGE$। समद्विभाजक होने से

$$\angle ACD = \angle FGH, \quad \angle DCB = \angle HGE$$

(i)

$\triangle ACD \sim \triangle FGH$ (AA), अतः $\boxed{CD/GH = AC/FG}$। **(ii)**

$\angle DCB = \angle HGE$ और $\angle B = \angle E$; अतः $\boxed{\triangle DCB \sim \triangle HGE}$। **(iii)**

$\angle DCA = \angle HGF$ और $\angle A = \angle F$; अतः $\boxed{\triangle DCA \sim \triangle HGF}$।

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 11 और 12

11. समद्विबाहु $\triangle ABC$, $AB = AC$

आधार कोण बराबर: $\angle ABC = \angle BCA$। E, CB के बढ़े भाग पर है, अतः आवश्यक संगत कोण बराबर हैं। साथ ही $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ से दोनों समकोण $90°$। AA से

$$\boxed{\triangle ABD \sim \triangle ECF}$$

12. दो भुजाएँ और माध्यिकाएँ समानुपाती

दिया: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$। D, M मध्य-बिंदु हैं, इसलिए $BD = BC/2$, $QM = QR/2$। अतः

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$$

SSS से $\triangle ABD \sim \triangle PQM$, इसलिए $\angle ABC = \angle PQR$।

अब $AB/PQ = BC/QR$ तथा बीच के कोण बराबर। SAS से $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$।

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 13 और 14

13. सिद्ध करें $CA^2 = CB \cdot CD$

$\triangle ADC$ और $\triangle BAC$ में $\angle ADC = \angle BAC$ (दिया) तथा $\angle ACD = \angle BCA$। AA से दोनों समरूप। अतः

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow \boxed{CA^2 = CB \cdot CD}$$

14. AB, AC, AD क्रमशः PQ, PR, PM के समानुपाती

AD को E तक ऐसा बढ़ाएँ कि $AD = DE$; PM को N तक कि $PM = MN$। माध्यिका के कारण $BD = DC$, $QM = MR$। SAS सर्वांगसमता से $AB = CE$ तथा $PQ = RN$।

दिए अनुपात से

$$\frac{CE}{RN} = \frac{AC}{PR} = \frac{AE}{PN}$$

SSS से $\triangle ACE \sim \triangle PRN$, अतः $\angle A = \angle P$। अब $AB/PQ = AC/PR$; SAS से $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$।

प्रश्नावली 6.3 - प्रश्न 15 और 16

15. मीनार की ऊँचाई

एक ही समय पर सूर्य की किरणों का कोण समान है; खंभे और मीनार से बने समकोण त्रिभुज AA से समरूप हैं। मान लें ऊँचाई h m।

$$\frac{6}{h} = \frac{4}{28} \Rightarrow h = \frac{6 \times 28}{4} = 42$$

उत्तर: मीनार की ऊँचाई 42 मीटर है।

16. समरूप त्रिभुजों की माध्यिकाएँ

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$; अतः $AB/PQ = BC/QR$ और $\angle B = \angle Q$। माध्यिकाओं से $BD = BC/2$, $QM = QR/2$, इसलिए

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$$

बीच के कोण बराबर होने से $\triangle ABD \sim \triangle PQM$ (SAS)। फलतः

$$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}}$$

परीक्षा की सबसे महत्वपूर्ण पंक्तियाँ

1. $DE \parallel BC$ देखते ही BPT या समरूपता की संभावना जाँचें।
2. दो कोण बराबर मिलें तो AA कसौटी पर्याप्त है।
3. SSS में तीनों अनुपात और SAS में बीच वाला कोण अनिवार्य है।
4. शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं; समांतर रेखाओं में एकांतर कोण बराबर होते हैं।
5. समरूप त्रिभुजों के संगत कोण बराबर और संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।
6. सर्वांगसमता में CPCT का उपयोग करें; समरूपता में corresponding sides का ratio लिखें।
7. निष्कर्ष से पहले कसौटी का नाम अवश्य लिखें।

उत्तर लिखने का क्रम: दिया है $\rightarrow$ सिद्ध करना है $\rightarrow$ बराबर कोण/अनुपात $\rightarrow$ कसौटी $\rightarrow$ निष्कर्ष।

एक पृष्ठ में त्वरित पुनरावृत्ति

विषय	याद रखने योग्य बात
समरूपता	आकार समान; माप अलग हो सकता है।
AA/AAA	दो संगत कोण बराबर।
SSS	तीनों संगत भुजाएँ समानुपाती।
SAS	दो भुजाएँ समानुपाती और बीच का कोण बराबर।
BPT	समांतर रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में बाँटती है।
BPT विलोम	समान अनुपात में बाँटने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर।
लिखावट	Correspondence का क्रम कभी न बदलें।

समाप्त

सभी प्रश्न एक बार स्वयं हल करके अवश्य देखें।