अध्याय 2

बहुपद

सभी NCERT प्रश्नों के पूर्ण हल

वर्तमान पाठ्यक्रम: NCERT गणित, कक्षा 10, पुनर्मुद्रण 2026-27। अभ्यास 2.1 और 2.2 के सभी प्रश्नों के क्रमवार हल।

इस नोटबुक में क्या मिलेगा?

- बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ
- आलेख देखकर शून्यकों की संख्या ज्ञात करना
- द्विघात बहुपद के शून्यक निकालना
- शून्यकों और गुणांकों के संबंध का सत्यापन
- योग और गुणनफल से बहुपद बनाना
- परीक्षा की महत्वपूर्ण पंक्तियाँ और पुनरावृत्ति

$p(k) = 0$ होने पर k, बहुपद $p(x)$ का शून्यक होता है।

महत्वपूर्ण परिभाषाएँ और सूत्र

1. बहुपद का शून्यक

यदि किसी वास्तविक संख्या k के लिए $p(k) = 0$ हो, तो k को बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहते हैं।

बहुपद के शून्यक वे x-निर्देशांक हैं जहाँ $y = p(x)$ का आलेख x-अक्ष को काटता या स्पर्श करता है।

2. अधिकतम शून्यक

n घात वाले बहुपद के अधिकतम n शून्यक हो सकते हैं। इसलिए द्विघात बहुपद के अधिकतम 2 और घन बहुपद के अधिकतम 3 शून्यक होते हैं। **3. द्विघात बहुपद का सूत्र**

यदि α, β, बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं, तो

$$\boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}} \quad \text{और} \quad \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

4. योग और गुणनफल से बहुपद

यदि शून्यकों का योग S और गुणनफल P हो, तो एक द्विघात बहुपद है:

$$\boxed{x^2 - Sx + P}$$

इसका कोई भी अशून्य गुणज $k(x^2 - Sx + P)$ भी सही उत्तर होगा।

सावधानी: x का गुणांक शून्यकों के योग का ऋणात्मक होता है।

अभ्यास 2.1

प्रश्न 1: चित्र 2.10 के प्रत्येक आलेख में शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

विधि: आलेख x-अक्ष को जितने अलग बिंदुओं पर काटता या स्पर्श करता है, शून्यकों की संख्या उतनी ही होती है।

(i) आलेख x-अक्ष को कहीं नहीं काटता। अतः शून्यकों की संख्या 0 है।

(ii) आलेख x-अक्ष को एक बिंदु पर काटता है। अतः 1 शून्यक है।

(iii) आलेख x-अक्ष को तीन अलग बिंदुओं पर काटता है। अतः 3 शून्यक हैं।

(iv) आलेख x-अक्ष को दो अलग बिंदुओं पर काटता है। अतः 2 शून्यक हैं।

(v) आलेख x-अक्ष को चार अलग बिंदुओं पर काटता है। अतः 4 शून्यक हैं।

(vi) आलेख x-अक्ष को तीन अलग बिंदुओं पर काटता है। अतः 3 शून्यक हैं।

उत्तर: क्रमशः $0,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3$ **शून्यक।**

केवल x-अक्ष के प्रतिच्छेद गिनें। y-अक्ष को काटने वाला बिंदु शून्यक नहीं बताता।

अभ्यास 2.2 - प्रश्न 1

(i) $p(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= x^2 - 4x + 2x - 8 \\ &= x(x-4) + 2(x-4) \\ &= (x-4)(x+2) \end{aligned}$$

अतः $x - 4 = 0$ या $x + 2 = 0$। इसलिए $\alpha = 4,\ \beta = -2$। **संबंध का सत्यापन**

$$\alpha + \beta = 4 - 2 = 2 = -\frac{-2}{1} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = 4(-2) = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{c}{a}$$

उत्तर: शून्यक 4 और -2 हैं। दोनों संबंध सत्यापित हैं।

(ii) $p(s) = 4s^2 - 4s + 1$

$$4s^2 - 4s + 1 = (2s-1)^2$$

अतः दोनों शून्यक $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2}$ हैं।

प्रश्न 1(ii) का सत्यापन

यहाँ $a = 4,\ b = -4,\ c = 1$।

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = -\frac{-4}{4} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$$

उत्तर: दोनों शून्यक $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ हैं। संबंध सत्यापित हैं।

(iii) $p(x) = 6x^2 - 7x - 3$

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 3 &= 6x^2 - 9x + 2x - 3 \\ &= 3x(2x-3) + 1(2x-3) \\ &= (3x+1)(2x-3) \end{aligned}$$

अतः $3x + 1 = 0$ या $2x - 3 = 0$।

$$\alpha = -\frac{1}{3}, \qquad \beta = \frac{3}{2}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{6} = -\frac{-7}{6}$$

$$\alpha\beta = -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{-3}{6}$$

उत्तर: शून्यक $-\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{2}$ हैं।

अभ्यास 2.2 - प्रश्न 1 जारी

(iv) $p(u) = 4u^2 + 8u$

$$4u^2 + 8u = 4u(u+2)$$

अतः $4u = 0$ या $u + 2 = 0$। इसलिए $\alpha = 0,\ \beta = -2$।

$$\alpha + \beta = -2 = -\frac{8}{4}, qquad \alpha\beta = 0 = \frac{0}{4}$$

उत्तर: शून्यक 0 और -2 हैं।

(v) $p(t) = t^2 - 15$

$$t^2 - 15 = t^2 - (\sqrt{15})^2 = (t - \sqrt{15})(t + \sqrt{15})$$

अतः $\alpha = \sqrt{15},\ \beta = -\sqrt{15}$।

$$\alpha + \beta = 0 = -\frac{0}{1}, qquad \alpha\beta = -15 = \frac{-15}{1}$$

उत्तर: शून्यक $\sqrt{15}$ और $-\sqrt{15}$ हैं।

वर्गों के अंतर का सूत्र: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$।

अभ्यास 2.2 - प्रश्न 1(vi)

$p(x) = 3x^2 - x - 4$

मध्य पद को $-4x + 3x$ के रूप में विभाजित करेंगे:

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 4 &= 3x^2 - 4x + 3x - 4 \\ &= x(3x-4) + 1(3x-4) \\ &= (x+1)(3x-4) \end{aligned}$$

अतः $x + 1 = 0$ या $3x - 4 = 0$।

$$\alpha = -1, \qquad \beta = \frac{4}{3}$$

सत्यापन

यहाँ $a = 3,\ b = -1,\ c = -4$।

$$\alpha + \beta = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} = -\frac{-1}{3} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = (-1)\frac{4}{3} = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{c}{a}$$

उत्तर: शून्यक -1 और $\frac{4}{3}$ हैं। दोनों संबंध सत्यापित हैं।

सत्यापन का क्रम: पहले a, b, c लिखें, फिर $\alpha + \beta$ और $\alpha\beta$ निकालकर सूत्रों से तुलना करें।

अभ्यास 2.2 - प्रश्न 2

दिए गए योग S और गुणनफल P से द्विघात बहुपद बनाइए।

मानक रूप: $p(x) = x^2 - Sx + P$

(i) $S = \frac{1}{4},\ P = -1$

$$p(x) = x^2 - \frac{1}{4}x - 1$$

भिन्न हटाने के लिए पूरे बहुपद को 4 से गुणा करने पर:

उत्तर: $p(x) = 4x^2 - x - 4$

(ii) $S = \sqrt{2},\ P = \frac{1}{3}$

$$p(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3}$$

पूरे बहुपद को 3 से गुणा करने पर:

उत्तर: $p(x) = 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$

(iii) $S = 0,\ P = \sqrt{5}$

$$p(x) = x^2 - 0x + \sqrt{5}$$

उत्तर: $p(x) = x^2 + \sqrt{5}$

अभ्यास 2.2 - प्रश्न 2 जारी

(iv) $S = 1, \ P = 1$

$$p(x) = x^2 - (1)x + 1$$

उत्तर: $p(x) = x^2 - x + 1$

(v) $S = -\frac{1}{4}, \ P = \frac{1}{4}$

$$p(x) = x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) x + \frac{1}{4}$$
$$= x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

पूरे बहुपद को 4 से गुणा करने पर:

उत्तर: $p(x) = 4x^2 + x + 1$

(vi) $S = 4, \ P = 1$

$$p(x) = x^2 - 4x + 1$$

उत्तर: $p(x) = x^2 - 4x + 1$

बहुपद अद्वितीय नहीं है। प्राप्त बहुपद का कोई भी अशून्य गुणज समान शून्यक देता है।

परीक्षा के लिए महत्वपूर्ण पंक्तियाँ

1. बहुपद के शून्यक वे x-निर्देशांक हैं जहाँ उसका आलेख x-अक्ष को काटता है।
2. n घात के बहुपद के अधिकतम n शून्यक हो सकते हैं।
3. रैखिक बहुपद $ax + b$ का एकमात्र शून्यक $-\frac{b}{a}$ है।
4. द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का आलेख परवलय होता है।
5. $a > 0$ होने पर परवलय ऊपर और $a < 0$ होने पर नीचे खुलता है।
6. $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ तथा $\alpha\beta = \frac{c}{a}$।
7. मध्य पद विभाजन में चुनी गई दो संख्याओं का योग b तथा गुणनफल ac होना चाहिए।
8. यदि $p(k) = 0$, तो k शून्यक और $(x - k)$ बहुपद का गुणनखंड है।

उत्तर में केवल शून्यक लिखना पर्याप्त नहीं है। जहाँ सत्यापन माँगा गया हो, दोनों संबंध अलग-अलग दिखाएँ।

एक पृष्ठ में पुनरावृत्ति

अभ्यास 2.1 के उत्तर

(i) 0, (ii) 1, (iii) 3, (iv) 2, (v) 4, (vi) 3 शून्यक। **अभ्यास 2.2 प्रश्न 1 के शून्यक**

(i) $4, -2$	(ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
(iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$	(iv) $0, -2$
(v) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$	(vi) $-1, \frac{4}{3}$

अभ्यास 2.2 प्रश्न 2 के बहुपद

$$
\begin{aligned}
(i)\quad & 4x^2 - x - 4 \\
(ii)\quad & 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 \\
(iii)\quad & x^2 + \sqrt{5} \\
(iv)\quad & x^2 - x + 1 \\
(v)\quad & 4x^2 + x + 1 \\
(vi)\quad & x^2 - 4x + 1
\end{aligned}
$$

अंतिम जाँच: चिन्ह सही हैं? भिन्न सरल किए हैं? दोनों संबंध सत्यापित हैं? अंतिम उत्तर स्पष्ट है?

अध्याय पूर्ण