अध्याय 8

त्रिकोणमिति का परिचय

सभी NCERT प्रश्नों के पूर्ण हल

NCERT गणित कक्षा 10, पुनर्मुद्रण 2026-27। प्रश्नावली 8.1, 8.2 और 8.3 के सभी प्रश्न व सभी 10 identities।

मुख्य विषय

- छह त्रिकोणमितीय अनुपात
- मानक कोणों के मान
- पूरक कोण
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ
- सभी प्रमाण प्रश्न
- परीक्षा की महत्वपूर्ण पंक्तियाँ

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

छह त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण त्रिभुज में कोण A के सापेक्ष:

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}, \qquad \cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}},$$
$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}, \qquad \cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}},$$
$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}, \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}.$$

व्युत्क्रम संबंध

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

लम्ब और आधार कोण बदलने पर बदलते हैं, पर कर्ण सदैव समकोण के सामने की सबसे लंबी भुजा है।

मानक कोणों की सारणी

A	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin A	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
cos A	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
tan A	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1
sec A	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

$0°$ **से** $90°$ **तक** sin A **बढ़ता है और** cos A **घटता है।** sin A, cos A **कभी 1 से अधिक नहीं।**

तीन मूल सर्वसमिकाएँ

$$\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$$

$$\boxed{1 + \tan^2 A = \sec^2 A}$$

$$\boxed{1 + \cot^2 A = \mathrm{cosec}^2 A}$$

पहली identity पाइथागोरस $AB^2 + BC^2 = AC^2$ को AC^2 से भाग देकर मिलती है।

दूसरी के लिए AB^2 और तीसरी के लिए BC^2 से भाग देते हैं। **पूरक कोण**

यदि $A + C = 90°$, तब

$$\sin A = \cos C, \quad \cos A = \sin C, \quad \tan A = \cot C$$

Identity सिद्ध करते समय सामान्यतः केवल LHS से शुरू करके RHS तक पहुँचें।

प्रश्नावली 8.1 - प्रश्न 1 और 2

1. $AB = 24, BC = 7, \angle B = 90°$

$AC = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$।

$$(i) \quad \sin A = \frac{7}{25}, \qquad \cos A = \frac{24}{25},$$
$$(ii) \quad \sin C = \frac{24}{25}, \qquad \cos C = \frac{7}{25}.$$

2. आकृति 8.13

$PR = 13, PQ = 12$; अतः $QR = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$।

$$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}, \qquad \cot R = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

उत्तर: $\tan P - \cot R = 0$।

प्रश्नावली 8.1 - प्रश्न 3 से 5

3. $\sin A = 3/4$

लम्ब $= 3k$, कर्ण $= 4k$; आधार $= \sqrt{7}k$।

$$\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

4. $15 \cot A = 8$

$\cot A = 8/15$; आधार $= 8k$, लम्ब $= 15k$, कर्ण $= 17k$।

$$\sin A = \frac{15}{17}, \qquad \sec A = \frac{17}{8}$$

5. $\sec\theta = 13/12$

कर्ण $= 13k$, आधार $= 12k$, लम्ब $= 5k$।

$$\sin\theta = \frac{5}{13},\ \cos\theta = \frac{12}{13},\ \tan\theta = \frac{5}{12},\ \cot\theta = \frac{12}{5},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$$

प्रश्नावली 8.1 - प्रश्न 6 और 7

6. यदि $\cos A = \cos B$, सिद्ध करें $A = B$

दो समकोण त्रिभुजों में $\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ तथा $\cos B = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$। बराबर अनुपात से दोनों त्रिभुज समरूप (SSS) होंगे; इसलिए संगत न्यून कोण बराबर।

उत्तर: $\angle A = \angle B$।

7. $\cot\theta = 7/8$

आधार $= 7k$, लम्ब $= 8k$, कर्ण $= \sqrt{113}k$।

$$(i) \quad \frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta = \frac{49}{64},$$

$$(ii) \quad \cot^2\theta = \frac{49}{64}.$$

प्रश्नावली 8.1 - प्रश्न 8 और 9

8. $3\cot A = 4$

$\cot A = 4/3$, अतः $\tan A = 3/4$, $\sin A = 3/5$, $\cos A = 4/5$।

$$LHS = \frac{1 - 9/16}{1 + 9/16} = \frac{7}{25}$$

$$RHS = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

उत्तर: दोनों पक्ष बराबर; कथन सत्य है।

9. $\tan A = 1/\sqrt{3}$

$A = 30°$, इसलिए $C = 60°$।

$$(i)\ \sin A \cos C + \cos A \sin C = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$
$$(ii)\ \cos A \cos C - \sin A \sin C = \tfrac{\sqrt{3}}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

प्रश्नावली 8.1 - प्रश्न 10 और 11

10. $PR + QR = 25, PQ = 5$

मानें $QR = x$, तब $PR = 25 - x$।

$$(25 - x)^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x = 12, \quad PR = 13$$

$$\sin P = \frac{12}{13}, \qquad \cos P = \frac{5}{13}, \qquad \tan P = \frac{12}{5}$$

11. सत्य/असत्य

(i) $\tan A$ सदा 1 से कम - असत्य; $\tan 60° = \sqrt{3}$।

(ii) $\sec A = 12/5$ संभव - सत्य; sec का मान ≥ 1 हो सकता है।

(iii) cos का अर्थ cosecant - असत्य; cos = cosine।

(iv) cot A, cot और A का गुणनफल - असत्य; यह cotangent ratio है।

(v) $\sin\theta = 4/3$ संभव - असत्य; $|\sin\theta| \leq 1$।

प्रश्नावली 8.2 - प्रश्न 1(i) से (iii)

(i)

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

(ii)

$$2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ = 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

(iii)

$$\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ} = \frac{1/\sqrt{2}}{2/\sqrt{3} + 2} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

उत्तर: (i) 1, (ii) 2, (iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ ।

प्रश्नावली 8.2 - प्रश्न 1(iv), (v)

(iv)

$$\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$

(v)

$$\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5/4 + 16/3 - 1}{1/4 + 3/4} = \frac{67}{12}$$

उत्तर: (iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$, (v) $\frac{67}{12}$ ।

प्रश्नावली 8.2 - प्रश्न 2

(i) $\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \frac{2/\sqrt{3}}{4/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$। विकल्प A।

(ii) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} = 0$। विकल्प D।

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ केवल $A = 0^\circ$ पर: दोनों 0। विकल्प A।

(iv) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$। विकल्प C।

यहाँ $\sin 2A$ का अर्थ $\sin(2A)$ है, जबकि $\sin^2 A$ का अर्थ $(\sin A)^2$ है।

प्रश्नावली 8.2 - प्रश्न 3 और 4

3. A, B **ज्ञात करें**

$\tan(A+B) = \sqrt{3} \Rightarrow A+B = 60°$।

$\tan(A-B) = 1/\sqrt{3} \Rightarrow A-B = 30°$।

जोड़ने पर $2A = 90° \Rightarrow A = 45°$; अतः $B = 15°$। **4. सत्य/असत्य**

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ - असत्य; $30°, 60°$ रखकर जाँचें।

(ii) $0°$ से $90°$ तक $\sin\theta$ बढ़ता है - सत्य।

(iii) इसी अंतराल में $\cos\theta$ बढ़ता है - असत्य; घटता है।

(iv) $\sin\theta = \cos\theta$ सभी θ के लिए - असत्य; केवल $45°$ पर।

(v) $A = 0°$ पर $\cot A$ अपरिभाषित - सत्य।

प्रश्नावली 8.3 - प्रश्न 1 और 2

1. $\cot A$ के पदों में

$$\boxed{\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}}$$

$$\boxed{\tan A = \frac{1}{\cot A}}, \quad \boxed{\sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}}$$

2. $\sec A$ के पदों में सभी अन्य अनुपात

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}, \qquad \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1},$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}, \qquad \cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}},$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}.$$

न्यून कोण के लिए सभी ratios धनात्मक हैं, इसलिए धनात्मक वर्गमूल लिया गया है।

प्रश्नावली 8.3 - प्रश्न 3

(i) $9(\sec^2 A - \tan^2 A) = 9$। विकल्प B।

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) = 2$। विकल्प C।

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) = \frac{1+\sin A}{\cos A}(1 - \sin A) = \cos A$। विकल्प D।

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A} = \tan^2 A$। विकल्प D।

प्रश्नावली 8.3 - प्रश्न 4(i), (ii)

(i)

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 &= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \\
&= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \boxed{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} &= \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)} \\
&= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)} = \boxed{2\sec A}.
\end{aligned}
$$

प्रश्नावली 8.3 - प्रश्न 4(iii), (iv)

(iii)

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$
$$=\frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\boxed{1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta}.$$

(iv)

$$LHS=\frac{1+\sec A}{\sec A}=1+\cos A$$

$$RHS=\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}=\frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}=1+\cos A$$

अतः $\boxed{LHS=RHS}$।

प्रश्नावली 8.3 - प्रश्न 4(v), (vi)

(v)

अंश और हर को $\sin A$ से भाग दें:

$$LHS = \frac{\cot A - 1 + \operatorname{cosec} A}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$$

$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ का प्रयोग कर सरल करने पर

$$LHS = \boxed{\operatorname{cosec} A + \cot A} = RHS$$

(vi)

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$
$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \boxed{\sec A + \tan A}.$$

प्रश्नावली 8.3 - प्रश्न 4(vii), (viii)

(vii)

$$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin\theta(2\cos^2\theta - 1)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)} = \boxed{\tan\theta}$$

(viii)

विस्तार करें:

$$LHS = \sin^2 A + \text{cosec}^2 A + 2 + \cos^2 A + \sec^2 A + 2$$

$$= 1 + (1 + \cot^2 A) + (1 + \tan^2 A) + 4$$

$$= \boxed{7 + \tan^2 A + \cot^2 A}.$$

प्रश्नावली 8.3 - प्रश्न 4(ix), (x)

(ix)

$$(\text{cosec}\, A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{\cos^2 A}{\sin A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$
$$= \sin A \cos A.$$

और $\frac{1}{\tan A + \cot A} = \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}} = \sin A \cos A$। सिद्ध। **(x)**

$$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A} = \tan^2 A$$

$$\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \left(\frac{1-t}{1-1/t}\right)^2 = (-t)^2 = \tan^2 A$$

अतः दोनों पक्ष $\boxed{\tan^2 A}$ के बराबर हैं।

परीक्षा की महत्वपूर्ण पंक्तियाँ

1. पहले कोण के सापेक्ष लम्ब, आधार और कर्ण पहचानें।
2. $\sin A, \cos A \leq 1$; $\sec A, \operatorname{cosec} A \geq 1$ जहाँ परिभाषित हों।
3. $\tan 90^\circ, \sec 90^\circ, \cot 0^\circ, \operatorname{cosec} 0^\circ$ अपरिभाषित हैं।
4. $\sin^2 A$ और $\sin(2A)$ अलग हैं।
5. identity में कठिन पक्ष से शुरू करें; दोनों पक्ष एक साथ न बदलें।
6. $1 - \sin^2 A = \cos^2 A$ तथा $1 - \cos^2 A = \sin^2 A$ बार-बार उपयोग होते हैं।
7. वर्गमूल लेते समय न्यून कोण के ratios धनात्मक होते हैं।
8. अंतिम पंक्ति में स्पष्ट लिखें: LHS = RHS, अतः सिद्ध।

मानक कोणों की सारणी और तीनों identities इस अध्याय की scoring key हैं।

त्वरित पुनरावृत्ति

संकेत	तुरंत उपयोग
एक ratio दिया	भुजाएँ मानें, पाइथागोरस लगाएँ
$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$	मानक सारणी
$A + C = 90^\circ$	पूरक ratio
$1 - \sin^2 A$	$\cos^2 A$
$1 + \tan^2 A$	$\sec^2 A$
$1 + \cot^2 A$	$\text{cosec}^2 A$
$1 \pm \sin A$	conjugate से गुणा
प्रमाण	LHS से RHS

समाप्त

सभी identities को स्वयं दोबारा लिखें।