अध्याय 10

वृत्त

सभी NCERT प्रश्नों के पूर्ण हल

NCERT गणित कक्षा 10, पुनर्मुद्रण 2026-27। प्रश्नावली 10.1 और 10.2 के सभी 17 मुख्य प्रश्न।

मुख्य विषय

- छेदक और स्पर्शरेखा
- स्पर्श-बिंदु पर त्रिज्या
- बाह्य बिंदु से दो स्पर्शरेखाएँ
- स्पर्शी चतुर्भुज एवं त्रिभुज
- सभी प्रमाण प्रश्न
- परीक्षा की महत्वपूर्ण पंक्तियाँ

$$OP \perp PT$$

मूल परिभाषाएँ

अप्रतिच्छेदी रेखा

वृत्त से कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं। **छेदक रेखा**

वृत्त को दो अलग बिंदुओं पर काटती है। **स्पर्शरेखा**

वृत्त को ठीक एक बिंदु पर छूती है; उस बिंदु को स्पर्श-बिंदु कहते हैं। **एक बिंदु से स्पर्शरेखाओं की संख्या**

बिंदु की स्थिति	स्पर्शरेखाएँ
वृत्त के अंदर	0
वृत्त पर	1
वृत्त के बाहर	2

वृत्त पर दिए बिंदु से केवल एक स्पर्शरेखा खींची जा सकती है।

प्रमेय 10.1

कथन

वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्शरेखा, उस स्पर्श-बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

$$\boxed{OP \perp XY}$$

प्रमाण

XY वृत्त को P पर स्पर्श करती है। XY पर P के अलावा कोई बिंदु Q लें। Q वृत्त के बाहर है, इसलिए

$$OQ > OP$$

अर्थात OP, केंद्र O से रेखा XY तक की सबसे छोटी दूरी है। किसी बिंदु से रेखा तक सबसे छोटी दूरी लंब होती है। इसलिए $OP \perp XY$।

> **स्पर्शरेखा-त्रिज्या के बीच कोण हमेशा 90° लिखें।**

प्रमेय 10.2

कथन

किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्शरेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

$$\boxed{PQ = PR}$$

प्रमाण

केंद्र O को P, Q, R से मिलाएँ। $OQ \perp PQ$ और $OR \perp PR$। समकोण त्रिभुज $\triangle OQP$ तथा $\triangle ORP$ में:

$$OQ = OR, \qquad OP = OP$$

यहाँ OQ, OR एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं और OP उभयनिष्ठ है। RHS सर्वांगसमता से $\triangle OQP \cong \triangle ORP$। CPCT से $PQ = PR$।

इसी सर्वांगसमता से OP, दोनों स्पर्शरेखाओं के बीच के कोण का समद्विभाजक भी है।

प्रश्नावली 10.1 - प्रश्न 1 और 2

1. एक वृत्त की कितनी स्पर्शरेखाएँ हो सकती हैं?

वृत्त पर अनंत बिंदु होते हैं और प्रत्येक बिंदु पर एक स्पर्शरेखा।

उत्तर: एक वृत्त की अनंत स्पर्शरेखाएँ हो सकती हैं।

2. रिक्त स्थान

(i) स्पर्शरेखा वृत्त को **एक** बिंदु पर काटती/छूती है।

(ii) वृत्त को दो बिंदुओं पर काटने वाली रेखा **छेदक** कहलाती है।

(iii) वृत्त की अधिकतम **दो** समांतर स्पर्शरेखाएँ हो सकती हैं।

(iv) स्पर्शरेखा और वृत्त का उभयनिष्ठ बिंदु **स्पर्श-बिंदु** कहलाता है।

प्रश्नावली 10.1 - प्रश्न 3 और 4

3. $OP = 5$ **cm,** $OQ = 12$ **cm**

$OP \perp PQ$, अतः $\triangle OPQ$ समकोण है:

$$PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \text{ cm}$$

उत्तर: विकल्प D, $\sqrt{119}$ cm।

4. रचना

1. एक वृत्त और दी गई रेखा l खींचें।
2. केंद्र O से l पर लंब डालें।
3. l के समांतर ऐसी रेखा बनाएँ जिसकी केंद्र से दूरी त्रिज्या के बराबर हो; यह स्पर्शरेखा है।
4. दूसरी समांतर रेखा बनाएँ जिसकी केंद्र से दूरी त्रिज्या से कम हो; यह वृत्त को दो बिंदुओं पर काटेगी, अतः छेदक है।

केंद्र से दूरी: $> r$ अप्रतिच्छेदी, $= r$ स्पर्शरेखा, $< r$ छेदक।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 1 से 3

1. स्पर्शरेखा 24 cm, केंद्र-दूरी 25 cm

$r^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow r = 7$ cm। विकल्प A। **2.** $\angle POQ = 110^\circ$

चतुर्भुज $OPTQ$ में $\angle OPT = \angle OQT = 90^\circ$।

$$\angle PTQ = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 110^\circ) = 70^\circ$$

विकल्प B। **3. स्पर्शरेखाओं के बीच कोण** 80°

OP कोण को समद्विभाजित करता है, इसलिए $\angle APO = 40^\circ$। समकोण $\triangle OAP$ में

$$\angle POA = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

उत्तर: विकल्प A, 50°।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 4 और 5

4. व्यास के सिरों की स्पर्शरेखाएँ समांतर

व्यास AB के सिरों A, B पर स्पर्शरेखाएँ l, m हैं। प्रमेय 10.1 से

$$l \perp OA, \qquad m \perp OB$$

OA और OB एक ही सीधी रेखा AB पर हैं। एक ही रेखा पर लंब दो रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं। अतः $\boxed{l \parallel m}$। **5. स्पर्श-बिंदु पर लंब केंद्र से गुजरता है**

P पर स्पर्शरेखा l है। केंद्र O को P से मिलाएँ। प्रमेय 10.1 से $OP \perp l$। किसी रेखा पर एक दिए बिंदु से केवल एक लंब खींचा जा सकता है। इसलिए P पर स्पर्शरेखा का लंब वही OP है, जो केंद्र O से गुजरता है।

उत्तर: सिद्ध।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 6 और 7

6. केंद्र से दूरी 5 cm, स्पर्शरेखा 4 cm

यदि त्रिज्या r है, तो समकोण त्रिभुज में

$$r^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

उत्तर: वृत्त की त्रिज्या 3 cm।

7. दो संकेंद्रित वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm और 3 cm

बड़े वृत्त की जीवा छोटे वृत्त को P पर स्पर्श करती है। केंद्र से जीवा पर लंब $OP = 3$ cm जीवा को समद्विभाजित करता है। आधी जीवा AP:

$$AP = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$AB = 2AP = 8 \text{ cm}$$

उत्तर: जीवा की लंबाई 8 cm।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 8

चतुर्भुज $ABCD$ वृत्त को क्रमशः P, Q, R, S पर स्पर्श करता है। समान बाह्य बिंदु से स्पर्शखंड बराबर:

$$AP = AS, \qquad BP = BQ,$$
$$CQ = CR, \qquad DR = DS.$$

अब

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AP + PB) + (CR + RD) \\ &= (AS + BQ) + (CQ + DS) \\ &= (AS + SD) + (BQ + QC) \\ &= AD + BC. \end{aligned}$$

उत्तर: $\boxed{AB + CD = AD + BC}$**, सिद्ध।**

स्पर्शी चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के योग बराबर होते हैं।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 9

XY और $X'Y'$ समांतर स्पर्शरिखाएँ हैं। तीसरी स्पर्शरिखा AB वृत्त को C पर छूती है। मानें पहली और दूसरी स्पर्श-बिंदु P, Q हैं।

A से स्पर्शरिखाएँ AP, AC बराबर; अतः OA, $\angle PAC$ का समद्विभाजक। इसी प्रकार OB, $\angle CBQ$ का समद्विभाजक।

$XY \parallel X'Y'$ होने से एक ही transversal AB पर

$$\angle PAC + \angle CBQ = 180^\circ$$

अतः इनके आधे कोणों का योग

$$\angle OAB + \angle ABO = 90^\circ$$

$\triangle AOB$ में

$$\angle AOB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

उत्तर: $\boxed{\angle AOB = 90^\circ}$।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 10

बाह्य बिंदु P से स्पर्शरिखाएँ PA, PB हैं और केंद्र O है।

स्पर्श-बिंदु पर त्रिज्या लंब:

$$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$$

चतुर्भुज $OAPB$ के कोणों का योग 360°:

$$\angle AOB + \angle APB + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\boxed{\angle AOB + \angle APB = 180^\circ}$$

अतः दो स्पर्शरिखाओं के बीच का कोण, स्पर्श-बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर बने कोण का संपूरक है।

उत्तर: सिद्ध।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 11

समांतर चतुर्भुज $ABCD$ किसी वृत्त को परिबद्ध करता है। स्पर्शी चतुर्भुज के गुण से

$$AB + CD = AD + BC \quad ...(1)$$

समांतर चतुर्भुज में

$$AB = CD, \qquad AD = BC \quad ...(2)$$

(2) को (1) में रखें:

$$2AB = 2AD \Rightarrow AB = AD$$

अब $AB = CD$ और $AD = BC$ के साथ

$$AB = BC = CD = DA$$

चारों भुजाएँ बराबर होने से $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

उत्तर: वृत्त को परिबद्ध करने वाला समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज है।

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 12

अंतःवृत्त की त्रिज्या 4 cm, $BD = 8$ cm, $DC = 6$ cm। समान स्पर्शखंड से

$$BF = BD = 8, \qquad CE = CD = 6, \qquad AF = AE = x$$

अतः

$$AB = x + 8, \quad AC = x + 6, \quad BC = 14$$

अर्धपरिमाप $s = x + 14$ और क्षेत्रफल $= rs = 4(x + 14)$। Heron सूत्र से

$$\Delta = \sqrt{(x + 14)x \cdot 8 \cdot 6}$$

दोनों बराबर करके वर्ग करें:

$$48x(x + 14) = 16(x + 14)^2 \Rightarrow 3x = x + 14 \Rightarrow x = 7$$

$$AB = 15 \text{ cm}, \qquad AC = 13 \text{ cm}$$

उत्तर: $AB = 15$ **cm और** $AC = 13$ **cm।**

प्रश्नावली 10.2 - प्रश्न 13

स्पर्शी चतुर्भुज $ABCD$ में केंद्र O को सभी शीर्षों से मिलाएँ। केंद्र, प्रत्येक शीर्ष पर दो स्पर्शरेखाओं के बीच के कोण का समद्विभाजक है।

$\triangle AOB$ में

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

$\triangle COD$ में

$$\angle COD = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

दोनों जोड़ें:

$$\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - \frac{\angle A + \angle B + \angle C + \angle D}{2}$$

चतुर्भुज के कोणों का योग 360° है, इसलिए

$$\boxed{\angle AOB + \angle COD = 180^\circ}$$

इसी प्रकार दूसरी जोड़ी के लिए भी परिणाम सत्य है।

उत्तर: सम्मुख भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।

परीक्षा की महत्वपूर्ण पंक्तियाँ

1. स्पर्श-बिंदु दिखते ही केंद्र से उसे मिलाएँ और $90°$ चिह्नित करें।
2. एक बाह्य बिंदु से निकले दोनों स्पर्शखंड बराबर लिखें।
3. tangent length के लिए $PT^2 = PO^2 - r^2$ उपयोगी है।
4. अंदर/वृत्त पर/बाहर के बिंदु से क्रमशः 0, 1, 2 स्पर्शरेखाएँ।
5. स्पर्शी चतुर्भुज में $AB + CD = BC + AD$।
6. दो स्पर्शरेखाओं का कोण + केंद्र का कोण $= 180°$।
7. केंद्र, बाह्य बिंदु पर स्पर्शरेखाओं के बीच का कोण समद्विभाजित करता है।
8. प्रमाण में theorem name और CPCT/RHS अवश्य लिखें।

सर्वाधिक उपयोगी दो पंक्तियाँ: Radius $\perp$ Tangent; External tangents are equal।

एक पृष्ठ में त्वरित पुनरावृत्ति

संकेत	तुरंत लिखें
स्पर्श-बिंदु P	$OP \perp PT$
बाह्य बिंदु A	$AP = AQ$
केंद्र-दूरी और radius	पाइथागोरस
दो स्पर्शरेखाओं का कोण	केंद्र-कोण का संपूरक
स्पर्शी चतुर्भुज	सम्मुख भुजा-योग बराबर
संकेंद्रित वृत्त की स्पर्शी जीवा	केंद्र का लंब जीवा को समद्विभाजित करता है
व्यास के सिरों की tangents	परस्पर समांतर

समाप्त

प्रत्येक प्रमाण की आकृति स्वयं बनाएँ।