प्रश्नावली 2.4

1)सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं I प्रत्येक स्थिति में शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध को भी सत्यापित कीजिए :

(i)$2x^3 + x^2 - 5x + 2$; ½ ,1 , -2

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$; 2,1,1

हल :

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$; 2,1 , -2

माना $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

इसलिए , $p(½) = 2(½)^3 + (½) - 5(½) + 2$

$= 2\times\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 5\times\frac{1}{2} + 2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 5/2 + 2$

$= 2/4 + 2 - 5/2$

$= ½ + 2 - 5/2$

$= 5/2 - 5/2 = 0$

इसलिए ½ p(x) का शून्यक है

अब ,

$p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 2x1 + 1 - 5 x 1 + 2$

$= 3 - 5 + 2 = 5 - 5 = 0$

इसलिए , 1 , p (x) का शून्यक है I

अब ,

$p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$= 2x(-8) + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2 = -16 + 16 = 0$

इसलिए , -2 , p (x) का शून्यक है I

इसप्रकार , ½ , 1 और -2 , p (x) के शून्यका हैं I

अब, माना $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ तथा $\gamma = -2$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2) = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-(1)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{-5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1 = \frac{-2}{2} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

(ii) x^3-4x^2 + 5x -2 -2 ; 2,1,1

हल :

माना **p (x) = x**^{3} - 4x^2 + 5x - 2

इसलिए , **p (2) = (2)**^{3} - 4(2)^2 + 5 (2) - 2

= 8 - 16 + 10 -2

= 18 - 18 = 0

इसलिए , **2** , **p (x)** का शून्यक है **I**

अब , **p (1) = (1)** ^{3} - 4 (1)^2+ 5 (1) -2

= 1-4 + 5-2 = 6-6 = 0

इसलिए , **1** , **p (x)** का शून्यक है **I**

इसप्रकार , **2** , **1** और **1** , **p (x)** के शून्यक हैं **I**

अब, माना $\alpha = 2$, $\beta = 1$ तथा $\gamma = 1$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1 = 4 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 2 + 1 + 2 = 5 = \frac{5}{1} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = 2 \times 1 \times 1 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

2) एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्याकों का योग दो शून्याकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग तथा तीनों शून्याकों के गुणनफल क्रमशः **2 , -7 , -14** हों **।**

माना $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ एक त्रिघात बहुपद है और α, β तथा γ बहुपद के शून्याक हैं

दिया है,

$\alpha + \beta + \gamma = 2$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$

$\alpha\beta\gamma = -14$

हम जानते हैं कि,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{1}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a} = \frac{-14}{1}$$

तुलना करने पर, $a = 1, b = -2, c = -7$ और $d = 14$

अतः,

त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ अर्थात $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ होगा।

3) यदि बहुपद $\mathbf{x^3} - 3x^2 + \mathbf{x + 1}$ के शून्यक **a – b , a , a + b** हों , तो **a** और **b** ज्ञात कीजिए **I**

हम जानते हैं कि ,

$$\text{मूलों का योगफल} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})+\mathrm{a}+(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\frac{-(-3)}{1}$$

$$\Rightarrow 3a = 3$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a})(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\frac{-(1)}{1}$$

$$\Rightarrow (1-\mathrm{b})1(1+\mathrm{b}) = -1 \qquad [\text{क्योंकि } a = 1]$$

$$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$$

$$\Rightarrow b^2 = 2$$

$$\Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

इस प्रकार, $a = 1$ और $b = \pm\sqrt{2}$

4)यदि बहुपद $\mathbf{x^4} - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$ के दो शून्यक $2 + \sqrt{3}$ और $2 - \sqrt{3}$ हों , तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए ।

हल:

माना **p (x) =** $\mathbf{x^4} - 6x^3 - 26x^2$ **+ 13x - 35** दिया है

$2 + \sqrt{3}$ और $2 - \sqrt{3}$ बहुपद p (x) के दो शून्यक हैं

इसलिए ,

$(x - 2 - \sqrt{3})$ और $(x - 2 + \sqrt{3})$ बहुपद p (x) के दो गुणनखंड हैं

अर्थात $x^2 - 4x + 1$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है। [क्योंकि$(x-2)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 1$]

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 35 \\
\hline
x^2 - 4x + 1 & x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35 \\
 & x^4 - 4x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\cline{2-2}
 & -2x^3 - 27x^2 + 138x - 35 \\
 & -2x^3 + 8x^2 - 2x \\
 & + \quad - \quad + \\
\cline{2-2}
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & + \quad - \quad + \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

इसप्रकार,

$p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 7x + 5x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)[x(x - 7) + 5(x - 7)]$

$= (x^2 - 4x + 1)(x + 5)(x - 7)$

अन्य शून्यक प्राप्त करने के लिए $x + 5 = 0$ और $x - 7 = 0$ रखने पर,

$x = -5$ और $x = 7$

इसप्रकार, अन्य शून्यक $x = -5$ और $x = 7$ हैं।

5)यदि बहुपद $\mathbf{x}^4 - 6x^3 + 16x^2$ **- 25x + 10** को एक अन्य बहुपद $\mathbf{x}^2$ **- 2x + k** से भाग दिया जाए और शेषफल **x + a** आता हो **,** तो **k** तथा **a** ज्ञात कीजिए **I**

हल: बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ और $x^2 - 2x + k$ पर विभाजन एल्गोरिथ्म से हमें प्राप्त होता है:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + (8-k) \\
\hline
x^2 - 2x + k & x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 \\
 & x^4 - 2x^3 + kx^2 \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & -4x^3 + (16-k)x^2 - 25x + 10 \\
 & -4x^3 + 8x^2 - 4kx \\
 & (+) \quad (-) \quad (+) \\
\hline
 & [(16-k)-8]x^2 + (-25+4k)x + 10 \\
 & \text{या} \\
 & (8-k)x^2 + (4k-25)x + 10 \\
 & (8-k)x^2 - 2(8-k)x + k(8-k) \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & [(-25+16)+(4k-2k)]x - k(8-k) + 10 \\
 & \text{या} \\
 & (-9+2k)x - k(8-k) + 10 \\
\hline
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ शेषफल $= (2k-9)x - k(8-k) + 10$ ...(1)

परन्तु शेषफल $= x + a$ ...(2)

अत: (1) और (2) से, $2k - 9 = 1$

$\Rightarrow$ $2k = 1 + 9 = 10 \Rightarrow k = \dfrac{10}{2} = 5$

और $a = -k(8-k) + 10 = -5(8-5) + 10$

$= -5(3) + 10 = -15 + 10 = -5$

अत: $k = 5$ और $a = -5$