प्रश्नावली 2.3

1. **विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके, निम्न मे p(x) को g (x) से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए:**

   I. $p(x)=x^3+5x-3$, $g(x)=x^{2-}2$
   II. $p(x)=x^4-3x^2+4x+5$, $g(x)=x^2+1-x$
   III. $p(x)=x^4-5x+6$, $g(x)=2-x^2$

i) $p(x)=x^3+3x2+5x-3$. $g(x)=x^{2-}2$

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad x - 3 \\
x^2 - 2 \;\overline{)\; x^3 - 3x^2 + 5x - 3} \\
\quad (-)\,x^3 \quad\quad (+)\,2x \\
\hline
\quad\quad - 3x^2 + 7x - 3 \\
\quad\quad - 3x^2 \quad\quad + 6 \\
\quad\quad (+) \quad\quad\quad (-) \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 7x - 9
\end{array}
$$

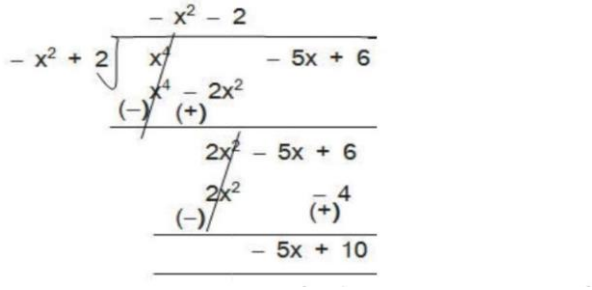
भागफल = x-3. शेषफल=7x-9

ii)$p(x)=x^4-3x^2+4x+5$, $g(x)=x^2+1-x$

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad\quad x^2 + x - 3 \\
x^2 - x + 1 \;\overline{)\; x^4 \quad - 3x^2 + 4x + 5} \\
\quad\quad (-)\,x^4 - x^3 + x^2 \\
\quad\quad\quad (+) \quad (-) \\
\hline
\quad\quad\quad\quad x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
\quad\quad\quad\quad (-)\,x^3 - x^2 + x \\
\quad\quad\quad\quad\quad (+) \quad (-) \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad - 3x^2 + 3x + 5 \\
\quad\quad\quad\quad\quad (+)\,- 3x^2 + 3x - 3 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad (-) \quad (+) \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 8
\end{array}
$$

भागफल = x^2+x-3 शेषफल=8

iii)$p(x)=x^4-5x+6$, $g(x)=2-x^2$



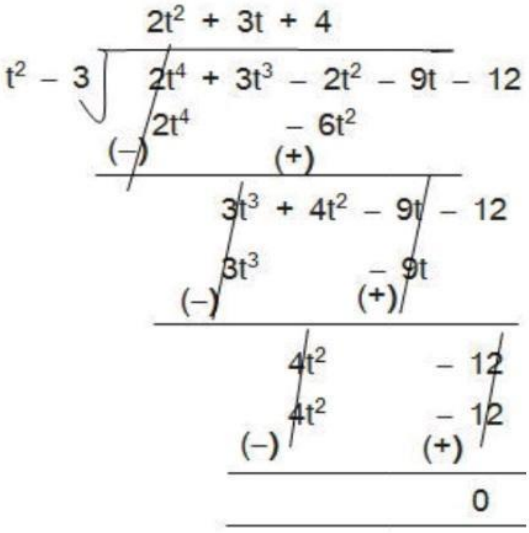
भागफल =- x^2-2 शेषफल=-5x+10

2 पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जांच कीजिए कि प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का गुणनखंड हैं.

I. **t^2-3, $2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$**
II. **x^2+3x+1, $3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$**
III. **x^3-3x+1,$x^5-4x^3+x^2+3x+1$**

I) **t^2-3, $2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$**

हल



चूँकि शेषफल r(x) = 0 है |

अतः **t^2-3, $2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$ का एक गुणनखंड है**

ii) **x^2+3x+1, $3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$**

$$
\begin{array}{l|l}
 & 3x^2 - 4x + 2 \\
\hline
x^2 + 3x + 1 & 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2 \\
 & 3x^4 + 9x^3 + 3x^2 \\
 & (-)\quad (-)\quad (-) \\
\hline
 & -4x^3 - 10x^2 + 2x + 2 \\
 & -4x^3 - 12x^2 - 4x \\
 & (+)\quad (+)\quad (+) \\
\hline
 & 2x^2 + 6x + 2 \\
 & 2x^2 + 6x + 2 \\
 & (-)\quad (-)\quad (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

चूँकि शेषफल $r(x) = 0$ है |

अतः x^2+3x+1, $3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$ का एक गुणनखंड है

iii) x^3-3x+1,$x^5-4x^3+x^2+3x+1$

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^2 - 1 \\
\hline
x^3 - 3x + 1 & x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
 & x^5 - 3x^3 + x^2 \\
 & (-)\quad (+)\quad (-) \\
\hline
 & -x^3 + 3x + 1 \\
 & -x^3 + 3x - 1 \\
 & (+)\quad (-)\quad (+) \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

चूँकि शेषफल $r(x) = 2$ है |

अतः **x^3-3x+1,$x^5-4x^3+x^2+3x+1$ का एक गुणनखंड नही हैं।**

3) $3x^4+6x^3-2x^2-10x-5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{5/3}$ और $-\sqrt{5/3}$ है।

p(x)=$3x^4+6x^3-2x^2-10x-5$

और दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं ।

अतः $x = \sqrt{\frac{5}{3}}, \quad x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

या $\quad x - \sqrt{\frac{5}{3}} = 0, \quad x + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$

या $\quad \left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 0$

या $\quad x^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = 0$

या $\quad x^2 - \frac{5}{3} = 0$

या $\quad 3x^2 - 5 = 0$

इसलिए, $3x^2 - 5$ p(x) का एक गुणनखंड है ।

अब, $3x^2-5$ से $3x^4+6x^3-2x^2-10x-5$ मे भाग देने पर

$$
\begin{array}{r}
x^2 + 2x + 1 \\
3x^2 - 5 \overline{)\ 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5} \\
\underline{\ 3x^4 \qquad - 5x^2\ } \\
6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
\underline{\ 6x^3 \qquad - 10x\ } \\
3x^2 - 5 \\
\underline{\ 3x^2 - 5\ } \\
0
\end{array}
$$

अतः $p(x)=(3x^2-5)(x^2+2x+1)$

अब,x^2+2x+1 को गुणनखंड कर शून्यक ज्ञात करने पर

$$= x^2 + x + x + 1 = 0$$

$$= x(x + 1) + 1(x + 1) = 0$$

$$= (x + 1)(x + 1) = 0$$

$$\text{या } x + 1 = 0,\ x + 1 = 0$$

$$\text{या } x = -1,\ x = -1$$

अतः अन्य दो शून्यक **-1**और **-1** है

4)यदि x^3-3x^2+x+2 को एक बहुपद **g(x)** से भाग देने पर भागफल और शेषफल क्रमशः **x - 2** और **-2x+4** है तो **g (x)** ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है भाज्य:**p (x)=** x^3-3x^2+x+2

भगफल: **q(x) = x - 2**

शेषफल: **r (x) = -2x+4**

भाजक: **g(x) =?**

भाज्य= भाजक xभगफल + शेषफल

$P(x)=q(x)g(x)+r(x)$

$x^3-3x^2+x+2 =g(x)(x - 2)+(-2x+4)$

$g(x)(x - 2)= x^3 - 3x^2+3x-2$

$$g(x) = \frac{3^2 - 3x^2 + 3x - 2}{x - 2}$$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ को $x - 2$ से भाग देने पर भाजक $g(x)$ प्राप्त होगा -

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 1 \\ \hline x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\ & x^3 - 2x^2 \quad (-)\ (+) \\ \hline & -x^2 + 3x - 2 \\ & -x^2 + 2x \quad (+)\ (-) \\ \hline & x - 2 \\ & x - 2 \quad (-)\ (+) \\ \hline & 0 \\ \hline \end{array}$$

अतः भजक **g(x)=x^2-x+1** है।

5)**बहुपदों p (x) , g (x) , q (x) और r (x) के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन एल्गोरिथम को संतुष्ट करते हों तथा**

(i) घात p (x) = घात q (x) हो

(ii) घात q (x) = घात r (x) हो

(iii) घात r (x) = 0 हो

युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से

p (x) = g (x) x q (x) + r (x)

(i) घात **p (x)** =घात **q(x)** हो

हल :

भाज्य **p (x)** और भागफल **q(x)** की घात सामान तभी हो सकता है जब भाजक **g (x)** की घात **0** अर्थात कोई संख्या हो **।**

उदाहरण : माना **p (x) = $2x^2$ - 6x + 3** और

माना **g (x) =2**

भाग देने पर

$p(x) = 2x^2 - 6x + 2 + 1 = 2(x^2 - 3x + 1) + 1$

अब **2 (x2 - 3x + 1) + 1** को **p (x) = g (x) x q (x) + r (x)** से तुलना करने पर हम पाते हैं :

अत : **q (x) = x^2 - 3x + 1** और **r (x) = 1**

इससे घात p (x) = घात q (x) प्राप्त होता है l

(ii) घात **q (x)** = घात **r (x)** हो

हल :

यह स्थिति तब आती है जब **p (x)** और **g (x)** का घात सामान हो जैसे -

माना

$p(x) = 2x^2 + 6x + 7$ और **g (x) = x^2** + 3x + 2

$p(x)=2(x^2 + 3x + 3)+1$

भाग देने पर :

q(x) = 2 और **r (x) = 1**

अत : घात **q(x)** = घात **r (x)** है **l**

(ii) घात **r (x) =0** हो

हल :

r (x) = 0 तब होता है

जब **p (x) , g (x)** से पूर्णत : विभाजित हो :

$P(x) = x^2$ **- 1 , g (x) = x + 1** विभाजित करने पर **q q(x) = x - 1** और **r (x) = 0** प्राप्त होता है **l**