प्रश्नावली 2.2

1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यको तथा गुणांको के बीच के संबंध की सत्यता की जांच कीजिए :

- i. $x^2 + 2x - 8$
- ii. $4s^2 - 4s + 1$
- iii. $6x^2 - 3 - 7x$
- iv. $4u^2 + 8u$
- v. $t^2 - 15$
- vi. $3x^2 - x - 4$

(i) $x^2 + 2x - 8$

हल:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + 4x - 2x - 8 = 0$$

$$x(x+4) - 2(x+4) = 0$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

अतः $(x - 2) = 0$ और $(x + 4) = 0$

$x = 2$ और $x = -4$

x का दो शून्यक $\alpha = 2$ और $\beta = -4$

शून्यको तथा गुणांको के बीच के संबंध की सत्यता की जांच

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -8$$

शून्यको का योग $(\alpha + \beta) = -b/a$

$$(2 + (-4)) = -2/1$$

$$-2 = -2$$

शून्यको का गुणनफल $(\alpha\beta) = c/a$

$$(2 * (-4)) = -8/1$$

$$-8 = -8$$

दोनों स्थितियों में संबंध सत्य है

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

हल:

$$4s^2-4s+1=0$$

$$4s^2-2s-2s+1=0$$

$$2s(2s-1)-1(2s-1)=0$$

$$(2s-1)(2s-1)=0$$

अतः $(2s-1)=0$ और $(2s-1)=0$

$S=1/2$ और $s=1/2$

S का दो शून्यक $\alpha = 1/2$ और $\beta = 1/2$

शून्यको तथा गुणांको के बीच के संबंध की सत्यता की जांच

$$a = 4 \quad b = -4 \quad c = 1$$

शून्यको का योग $(\alpha+\beta) = -b/a$

$$(1/2+1/2) = -(-4)/4$$

$$2/2 = 4/4$$

$$1=1$$

शून्यको का गुणनफल $(\alpha\beta) = c/a$

$$(1/2 * 1/2) = 1/4$$

$$1/4 = 1/4$$

दोनों स्थितियों में संबंध सत्य है

(iii) $6x^2-3-7x$

हल:

$$6x^2-3-7x=0$$

$$6x^2-7x-3=0$$

$$6x^2-9x+2x-3=0$$

$$3x(2x-3) +1(2x-3)=0$$

$$(3x+1)(2x-3)=0$$

अतः $(3x+1)=0$ और $(2x-3)=0$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ or } x = \frac{3}{2}$$

x का दो शून्यक $\alpha = -\frac{1}{3}$ और $\beta = \frac{3}{2}$

शून्यको तथा गुणांको के बीच के संबंध की सत्यता की जांच

$$a = 6 \quad b = -7 \quad c = -3$$

शून्यको का योग $(\alpha+\beta) = -b/a$

$$\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) = -(-7)/6$$

$$\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

शून्यको का गुणनफल $(\alpha\beta) = c/a$

$$-\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{6}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

दोनों स्थितियों में संबंध सत्य है

$$(iv) 4u^2 + 8u$$

हल:

$$4u(u+2)=0$$

अतः $4u=0$ और $(u+2)=0$

$$u=0 \text{ और } u=-2$$

u का दो शून्यक $\alpha = 0$ और $\beta = -2$

शून्यको तथा गुणांको के बीच के संबंध की सत्यता की जांच

$$a = 4 \quad b = 8 \quad c = 0$$

शून्यको का योग $(\alpha+\beta) = -b/a$

$$(0 + -2) = -8/4$$

$$-2=-2$$

शून्यको का गुणनफल $(\alpha\beta) = c/a$

$$(0 \cdot -2) = 0/4$$

$$0=0$$

दोनों स्थितियों में संबंध सत्य है

(v)

हल : $t^2 - 15$

$$t^2 - 15 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 = 15$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{15} = \pm\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{15}, t = -\sqrt{15}$$

अतः $\alpha = \sqrt{15}$ और $\beta = -\sqrt{15}$

गुणांक $a = 1$, $b = 0$, और $c = -15$

शून्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच :

शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$$\Rightarrow \sqrt{15} + -\sqrt{15} = \frac{-(0)}{1}$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \dots\dots (1)$$

शून्यकों का गुणनफल $((\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \sqrt{15} (-\sqrt{15}) = \frac{-15}{1}$$

$$\Rightarrow -15 = -15 \dots\dots (2)$$

दोनों स्थितियों में संबंध सत्य है

(vi) $3x^2 - x - 4$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x(3x - 4) + 1(3x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 4) = 0, \text{ और } (x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 4, \text{ और } x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3}, \text{ और } x = -1$$

$$\text{अतः } \alpha = \frac{4}{3}, \text{ और } \beta = -1$$

$$\text{गुणांक } a = 3, b = -1, \text{ और } c = -4$$

शून्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच :

$$\text{शून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + (-1) = \frac{-(-1)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \dots\dots (1)$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल } ((\alpha\beta) = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times (-1) = \frac{(-4)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} = \frac{-4}{3} \dots\dots (2)$$

दोनों स्थितियों में संबंध सत्य है

2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यको के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं।

i.) $\frac{1}{4}, -1$

ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

iii) $0, \sqrt{5}$

iv) $1, 1$

v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

vi) $4, 1$

हल : (i) $\frac{1}{4}, -1$

दिया है : $\alpha + \beta = \frac{1}{4}, \alpha\beta = -1$

चूँकि $ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$

तुलना करने पर

$a = k, b = -k(\alpha + \beta)$ और $c = k\alpha\beta$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{4}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$

$\Rightarrow a = 4$

$\Rightarrow b = -4(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow c = k\alpha\beta = 4(-1)$

अतः $ax^2 + bx + c$ के रूप में लिखने पर

$\Rightarrow 4x^2 - 4(\alpha + \beta)x + 4(\alpha\beta)$

$\Rightarrow 4x^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)x + 4(-1)$

$\Rightarrow 4x^2 - x - 4$

द्विघात बहुपद है : $4x^2 - x - 4$

हल : (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

दूसरी विधि से :

दिया है : $\alpha + \beta = \sqrt{2}, \alpha\beta = \frac{1}{3}$

चूँकि $ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$

या $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

या $\frac{ax^2 + bx + c}{k} = (x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3})$

या $\frac{ax^2 + bx + c}{k} = \frac{3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1}{3}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर $k = 3$

अतः $ax^2 + bx + c = 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$

द्विघात बहुपद है : $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$

हल : (iii) $0, \sqrt{5}$

दिया है : $\alpha + \beta = 0, \alpha\beta = \sqrt{5}$

चूँकि $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

या $\frac{ax^2 + bx + c}{k} = (x^2 - 0x + \sqrt{5})$

या $\frac{ax^2 + bx + c}{k} = \frac{x^2 + \sqrt{5}}{1}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर $k = 1$

अतः $ax^2 + bx + c = x^2 + \sqrt{5}$

द्विघात बहुपद है : $x^2 + \sqrt{5}$

हल : (iv) 1, 1

दिया है : $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$

चूँकि $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$$\text{या } \frac{ax^2 + bx + c}{k} = (x^2 - 1x + 1)$$

$$\text{या } \frac{ax^2 + bx + c}{k} = \frac{x^2 - x + 1}{1}$$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर $k = 1$

$$\text{अतः } ax^2 + bx + c = x^2 - x + 1$$

द्विघात बहुपद है : $x^2 - x + 1$

हल : (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

दिया है : $\alpha + \beta = -\frac{1}{4}, \alpha\beta = \frac{1}{4}$

चूँकि $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

$$\text{या } \frac{ax^2 + bx + c}{k} = (x^2 - (-\frac{1}{4})x + \frac{1}{4})$$

$$\text{या } \frac{ax^2 + bx + c}{k} = \frac{4x^2 + 4x + 1}{4}$$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर $k = 4$

$$\text{अतः } ax^2 + bx + c = 4x^2 + 4x + 1$$

द्विघात बहुपद है : $4x^2 + 4x + 1$

हल : (vi) 4, 1

तीसरी विधि :

दिया है : $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 1$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{4}{1} \text{ और } \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1}$$

तुलना करने पर $a = 1$, $b = -4$ और $c = 4$

अतः $ax^2 + bx + c$ में मान रखने पर

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (1)x^2 + (-4)x + 4 \\ &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

अतः द्विघात बहुपद है : $x^2 - 4x + 4$